ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к зачету

1. **Скалярные и векторные поля. Частные случаи: плоскопараллельное, осесимметрическое.**

Определение. Пусть задано множество $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Любая функция $u:\Omega \to \mathbf{R}$ называется *скалярным полем*.

Определение. Пусть задано множество $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Любая функция $\vec{F}:\Omega \to \mathbf{R}^3$ называется *векторным полем.*

Определение. Скалярное поле u (векторное поле $\vec{F}$) называется *плоскопараллельным*, если существует такая декартова система координат, что $u(M)=u(x,y)$, то есть u не зависит от одной из координат ($\vec{F}(M)=\vec{F}(x,y)$).

Определение. Скалярное поле u (векторное поле $\vec{F}$) называется *осесимметричным*, если существует такая цилиндрическая система координат (r,φ,z), что $u(M)=u(r,z)$, то есть u не зависит от координаты φ, иначе говоря, не зависит от поворотов ($\vec{F}(M)=\vec{F}(r,z)$).

2. **Коэффициенты Ламе для криволинейной системы координат (СК). Коэффициенты Ламе для цилиндрической и сферической СК.**

<u>Для произвольных криволинейных</u> координат

$$\begin{cases} x=\varphi_1(q_1,\ q_2,\ q_3); \\ y=\varphi_2(q_1,\ q_2,\ q_3); \\ z=\varphi_3(q_1,\ q_2,\ q_3), \end{cases}$$

коэффициенты Ламе

$$H_i=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\right)^2};$$

$i=1,\ 2,\ 3.$

<u>Для цилиндрических координат</u>

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi; \\ y=r\sin\varphi; \\ z=z. \end{cases}$$

коэффициенты Ламе

$H_r=1;$

$H_\varphi=r;$

$H_z=1.$

<u>Для сферических координат</u>

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi; \\ y=r\sin\theta\sin\varphi; \\ z=r\cos\theta. \end{cases}$$

коэффициенты Ламе

$H_r=1;$

$H_\theta=r;$

$H_\varphi=r\sin\theta.$

3. **Поток векторного поля. Циркуляция векторного поля.**

Определение. Потоком Φ векторного поля $\vec{F}=\left(F_x;F_y;F_z\right)$ через поверхность S (в заданном направлении $\vec{n}$) называется величина

$$\Phi(\vec{F},S)=\iint\limits_S F_x dydz+F_y dxdz+F_z dxdy,$$

равная поверхностному интегралу второго рода от векторного поля $\vec{F}$ по той стороне поверхности S, которая соответствует вектору $\vec{n}$.

Определение. Циркуляцией C векторного поля $\vec{F}=\left(F_x;F_y;F_z\right)$ по замкнутому контуру L (в заданном направлении) называется величина

$$C(\vec{F},L)=\int\limits_L F_x dx+F_y dy+F_z dz,$$

равная криволинейному интегралу второго рода от векторного поля $\vec{F}$ по кривой L в заданном направлении.

4. **Дифференциальные операции над скалярными и векторными полями: градиент, дивергенция, ротор. Формулы для вычисления в декартовой СК.**

Определение. Градиентом $\operatorname{grad} u$ скалярного поля u называется вектор, указывающий направление наибольшего возрастания скалярного поля u и по величине равный скорости роста u в этом направлении.

В декартовых координатах градиент имеет вид:

$$\operatorname{grad} u=\left(\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

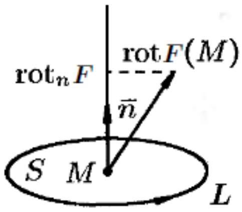
Определение. Дивергенцией $\operatorname{div}\vec{F}$ векторного поля $\vec{F}=\left(F_x;F_y;F_z\right)$ в точке M называется предел отношения потока векторного поля $\vec{F}$ через произвольную замкнутую поверхность, окружающую точку M, к ограниченному этой поверхностью объему при стремлении этого объема к нулю:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Phi(\vec{F},S)}{\Delta V}.$$

В декартовых координатах дивергенция имеет вид:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial x}+\frac{\partial F_z}{\partial x}.$$

Определение. Ротором $\operatorname{rot}\vec{F}$ векторного поля $\vec{F}=\left(F_x;F_y;F_z\right)$ в точке M называется вектор, проекция которого на каждое направление (заданное вектором $\vec{n}$) равна пределу отношения циркуляции (в направлении, согласованном с $\vec{n}$) векторного поля $\vec{F}$ по контуру L плоской площадки, перпендикулярной вектору $\vec{n}$, к площади этой площадки S при стремлении этой площади к нулю:



$$\operatorname{rot}_n\vec{F}=\lim_{S\to 0}\frac{C(\vec{F},L)}{S}.$$

В декартовых координатах ротор имеет вид:

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}.$$

5. **Оператор Гамильтона ∇. Запись градиента, дивергенции и ротора через оператор Гамильтона.**

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$\operatorname{grad}u=\nabla u,$$

$$\operatorname{div}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F},$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}.$$

6. **Векторные линии, соленоидальные и потенциальные векторные поля.**

Определение. Векторной линией векторного поля $\vec{F}$ называется кривая, в каждой точке которой вектор $\vec{F}(M)$ направлен по касательной к этой кривой.

Определение. Векторное поле $\vec{F}$ называется соленоидальным, если $\operatorname{div}\vec{F}=0$.

Определение. Векторное поле $\vec{F}$ называется потенциальным, если существует такое скалярное поле u, для которого

$$\operatorname{grad}u=\vec{F}.$$

7. **Нахождение единичной нормали к поверхности.**

Сначала нужно найти нормаль $\vec{n}$. Формулы для трех случаев приведены ниже.

1) явно заданная:
$z=f(x,y):\quad \vec{n}=\left(f'_x,f'_y,-1\right);$

2) неявно заданная:
$\Phi(x,y,z)=0:\quad \vec{n}=\left(\Phi'_x,\Phi'_y,\Phi'_z\right)$

3) параметрически заданная поверхность
$\vec{r}=\vec{r}(u,v):\quad \vec{n}=\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v.$

Затем нужно найти единичную нормаль по формуле:

$$\vec{n}_0=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}.$$

8. **Формула Стокса.**

Циркуляция векторного поля $\vec{F}=\left(F_x;F_y;F_z\right)$ вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого поля через поверхность S ограниченную контуром L:

$$C(\vec{F},L)=\Phi(\operatorname{rot}\vec{F},S).$$

ИЛИ:

Поверхностный интеграл второго рода от ротора $\operatorname{rot}\vec{F}$ векторного поля $\vec{F}=\left(F_x;F_y;F_z\right)$ равен криволинейному интегралу второго рода от векторного поля $\vec{F}$ по границе этой поверхности L в направлении, согласованном с ориентацией поверхности.

ИЛИ:

$$\oiint_S\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)dxdz+$$

$$+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L F_xdx+F_ydy+F_zdz.$$

9. **Формула Грина.**

Частный случай формулы Стокса для того случая, когда поверхность S является замкнутой областью на плоскости XOY (а поэтому $dz=0$):

$$\oiint_S\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L F_xdx+F_ydy.$$

10. **Формула Гаусса-Остроградского.**

Интеграл от дивергенции $\operatorname{div}\vec{F}$ векторного поля $\vec{F}=\left(F_x;F_y;F_z\right)$ по объему равен потоку $\Phi(\vec{F},S)$ этого поля через граничную поверхность в направлении внешней нормали:

$$\oiint_S F_xdydz+F_ydxdz+F_zdxdy=\iiint_V\operatorname{div}\ \vec{F}\ \ dxdydz.$$

11. **Пространственные (многомерные) матрицы. Соглашения по индексам и суммированию.**

s-мерной матрицей порядка n называется набор n^s чисел, нумеруемых индексами вида

$i_1, \dots, i_s$, где каждое из чисел $i_1, \dots, i_s$ независимо от остальных пробегает все значения $1,\dots,n$.

Двумерная матрица порядка n — это обычная матрица размера $n \times n$. Трехмерную матрицу можно представлять себе в виде n штук двумерных матриц, расположенных друг над другом, s-мерная матрица — это массив с s индексами, каждый из которых меняется от 1 до n.

Соглашение по индексам. Буквенный индекс (если он не является индексом суммирования) рассматривают как переменную величину, принимающую значения $1,\dots,n$, и если написано выражение, содержащее буквенный индекс, то предполагается, что выписаны n таких выражений для каждого значения индекса.

Индексы могут (по специальным соображениям) ставиться сверху или снизу (часть сверху, часть снизу). После их простановки их место фиксируется.

Запись, подобная записи

$$a_{i_1,\dots,i_s},$$

будет означать всю совокупность элементов многомерной матрицы, то есть матрицу целиком, а запись $a^i_{jk} = b^i_{jk}$ означает, что равны друг другу стоящие на одинаковых местах элементы двух трехмерных матриц, то есть матрицы равны.

s-мерная матрица будет называться $(p+q)$-матрицей, если у нее p верхних индексов и q индексов ($p+q=s$):

$$a^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_q}.$$

Соглашение по суммированию. Если какой-то индекс встречается дважды (обычно при этом один раз он написан сверху, а другой — снизу), это означает, что по нему производится суммирование:

$$x_{ij}\eta^j = x_{i1}\eta^1 + \dots + x_{in}\eta^n.$$

Если повторяющихся (по два раза) индексов несколько — то по каждой паре идет суммирование: После проведения суммирования по индексу он исчезает из индексов:

$$\begin{aligned} A_{k\ell} &= a_{ij}x^i_k y^j_\ell = \\ &= a_{11}x^1_k y^1_\ell + \dots + a_{1n}x^n_k y^1_\ell + \\ &\qquad \dots \\ &+ a_{n1}x^n_k y^1_\ell + \dots + a_{nn}x^n_k y^n_\ell. \end{aligned}$$

12. Тензор в ортонормированной системе координат.

Пусть L_n — n-мерное вещественное линейное пространство (множество n мерных векторов с компонентами из $(-\infty;+\infty)$).

Пусть $\mathsf{e} = \{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ и $\tilde{\mathsf{e}} = \{\tilde{\vec{e}}_1,\dots,\tilde{\vec{e}}_n\}$ некоторые базисы пространства L_n.

Пусть A^ℓ_j — матрица перехода от базиса e к базису $\tilde{\mathsf{e}}$, а B^i_k — матрица перехода от базиса $\tilde{\mathsf{e}}$ к базису e ($B = A^{-1}$).

Определение. Говорят, что в L_n задан тензор T типа (p,q), если каждому базису сопоставлена $(p+q)$-матрица порядка n, причем для любых базисов e и $\tilde{\mathsf{e}}$ элементы $T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}$ и $\tilde{T}^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}$ соответствующих базисам матриц связаны соотношениями:

$$\tilde{T}^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} = B^{i_1}_{k_1}\cdot\ldots\cdot B^{i_p}_{k_p} A^{\ell_1}_{j_1}\cdot\ldots\cdot A^{\ell_q}_{j_q}\cdot T^{k_1,\dots,k_p}_{\ell_1,\dots,\ell_q}$$

13. Операции над тензорами. Симметрическая и антисимметрическая компоненты.

1. Сложение тензоров одинаковых рангов, покомпонентно.
2. Умножение тензоров. Результатом перемножения двух тензоров рангов R1 и R2 является тензор суммарного ранга R1 + R2. Компоненты тензорного произведения — произведения соответствующих компонент множителей, например:
Например: $A_i B_{jk} = C_{ijk}$.
3. Свёртка тензора—суммирование по повторяющимся индексам
$$B^i{}_{kl} = \sum_j A^{ji}{}_{jkl} = A^{ji}{}_{jkl}$$
4. Тензор называется симметричным (антисимметричным), если $t_{ij} = t_{ji}$ ($t_{ij} = -t_{ji}$)
$\forall A A = A^s + A^a$, где A^s и A^a – симметрич. и антисимметр. компоненты.